Iterative Bildrekonstruktion

Prof. Dr. Marc Kachelrieß

Deutsches Krebsforschungszentrum (DKFZ)
Heidelberg, Germany
www.dkfz.de

DEUTSCHES
KREBSFORSCHUNGSZENTRUM
IN DER HELMHOLTZ-GEMEINSCHAFT

$$x^2 = y$$

Modell

$$\cancel{x = \sqrt{y}}$$

$$(x_n + \Delta x_n)^2 = y$$

$$x_n^2 + 2x_n\Delta x_n + \cancel{\Delta x_n^2} = y$$

$$x_n^2 + 2x_n\Delta x_n \approx y$$

$$\Delta x_n = \tfrac{1}{2}(y - x_n^2)/x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

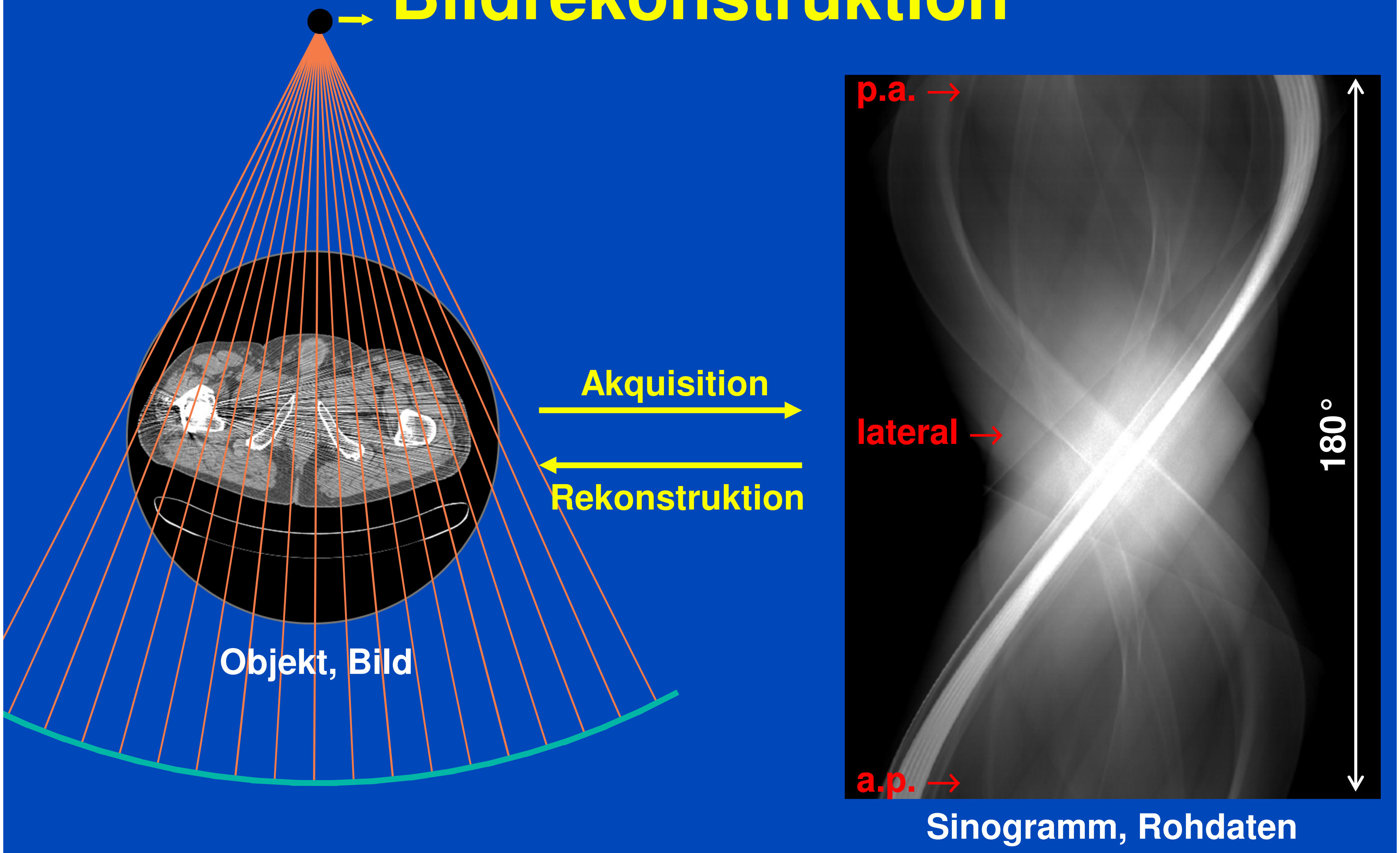
Update-gleichung

Einfluss Updategleichung und Modell

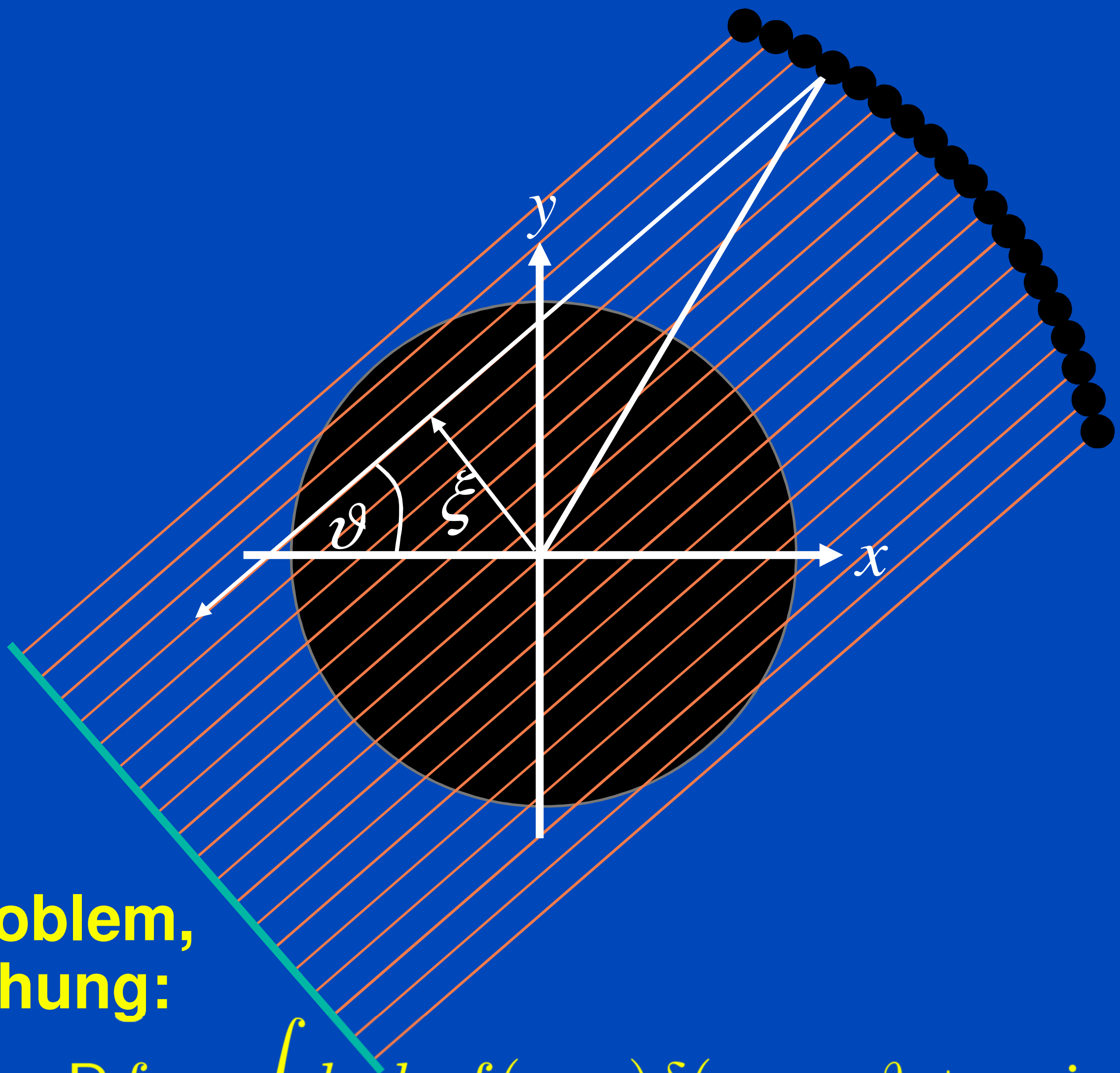
$0.5\,(3 - x_n^2)/x_n$	$0.4\,(3 - x_n^2)/x_n$	$0.5\,(3 - x_n^{2.1})/x_n$
$x_0 = 1.$	$x_0 = 1.$	$x_0 = 1.$
$x_1 = 2.$	$x_1 = 1.8$	$x_1 = 2.$
$x_2 = 1.75$	$x_2 = 1.74667$	$x_2 = 1.67823$
$x_3 = 1.73214$	$x_3 = 1.73502$	$x_3 = 1.68833$
$x_4 = 1.73205$	$x_4 = 1.73265$	$x_4 = 1.68723$
$x_5 = 1.73205$	$x_5 = 1.73217$	$x_5 = 1.68734$
$x_6 = 1.73205$	$x_6 = 1.73207$	$x_6 = 1.68733$
$x_7 = 1.73205$	$x_7 = 1.73206$	$x_7 = 1.68733$
$x_8 = 1.73205$	$x_8 = 1.73205$	$x_8 = 1.68733$

$$x^2 = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

Bildrekonstruktion



Parallelstrahlgeometrie



Messung,
Ausgangsproblem,
Integralgleichung:

$$p(\vartheta, \xi) = \mathsf{R}f = \int dx dy\, f(x, y)\delta(x \cos\vartheta + y \sin\vartheta - \xi)$$

Gefilterte Rückprojektion (FBP)

Messung: $p(\vartheta,\xi) = \int dx dy\, f(x,y)\delta(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - \xi)$

Fouriertransformation:

$$\int d\xi\, p(\vartheta,\xi)e^{-2\pi i\xi u} = \int dx dy\, f(x,y)e^{-2\pi i u(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)}$$

Das ist das Zentralschnitttheorem: $P(\vartheta,u) = F(u\cos\vartheta, u\sin\vartheta)$

Inversion: $f(x,y) = \int_0^\pi d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} du\, |u| P(\vartheta,u)e^{2\pi i u(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)}$

$$= \int_0^\pi d\vartheta\, p(\vartheta,\xi) * k(\xi)\Big|_{\xi = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta}$$

dkfz.

Analytische Rekonstruktion

1. Problem $$p(\vartheta,\xi) = \int dxdy\, f(x,y)\delta(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - \xi)$$

2. Lösungsformel $$f(x,y) = \int_0^\pi d\vartheta\, p(\vartheta,\xi) * k(\xi)\Big|_{\xi = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta}$$

3. Diskretisierung $$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{k} * \boldsymbol{p})$$

Klassische iterative Rekonstruktion

1. Problem $$p(\vartheta,\xi) = \int dxdy\, f(x,y)\delta(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - \xi)$$

2. Diskretisierung $$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{f}$$

3. Lösungsformel $$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{f}_\nu}{\boldsymbol{R}^2 \cdot \boldsymbol{1}}$$

Linear System and CT System Matrix

$$\underbrace{\boldsymbol{R}}_{\text{Radon or x-ray transform}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{f}}_{\text{image to be reconstructed}} = \underbrace{\boldsymbol{p}}_{\text{measured rawdata}}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1M} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NM} \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

Kaczmarz's Method

$$\underbrace{\boldsymbol{R}}_{N \times M} \cdot \underbrace{\boldsymbol{f}}_{M \times 1} = \underbrace{\boldsymbol{p}}_{N \times 1}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_N \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{r}_n| = 1$$

$$\boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f} = \boldsymbol{p}_n$$

Kaczmarz‘s Method (2)

- Successively solve $\boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f} = p_n$
- To do so, project onto the hyperplanes

$$\boldsymbol{r}_n \cdot \big(\boldsymbol{f} + \lambda \boldsymbol{r}_n\big) = p_n$$

$$\lambda = p_n - \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f}$$

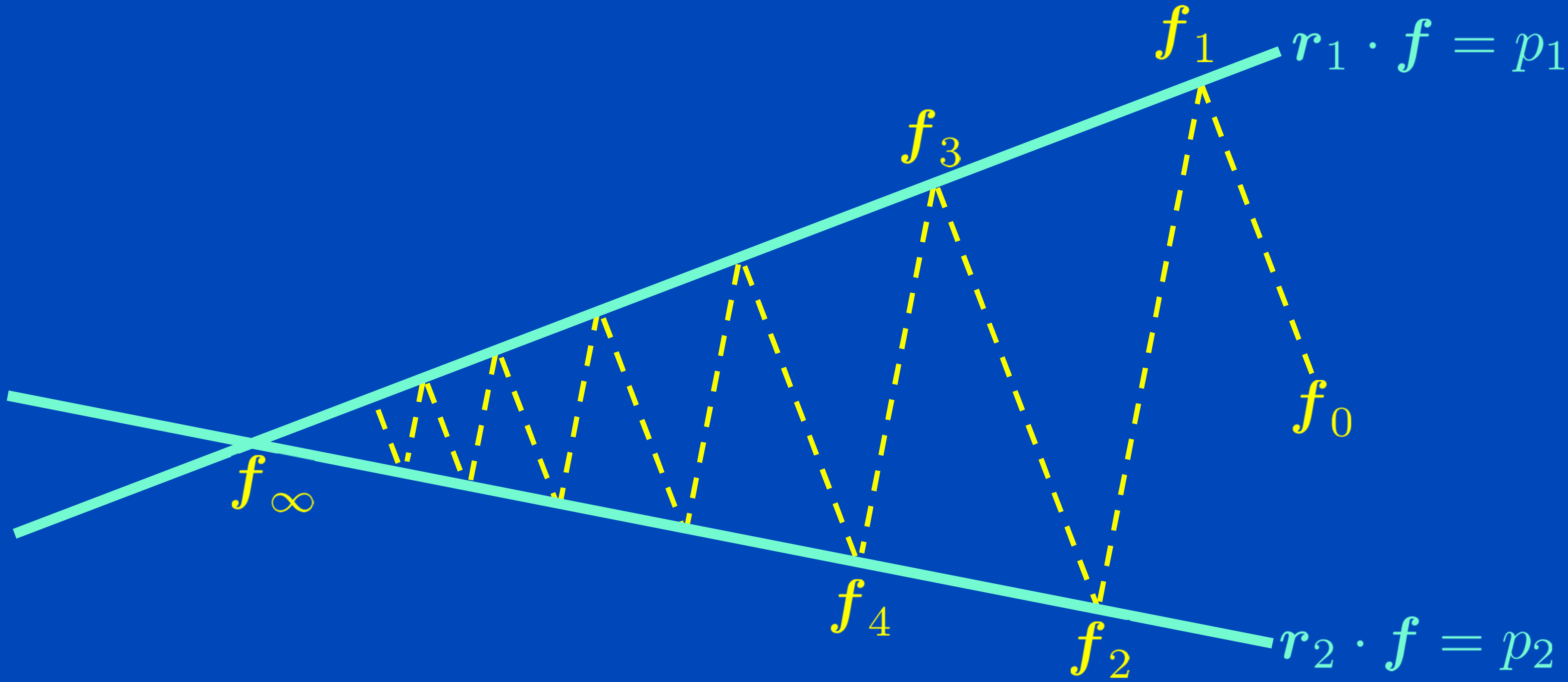
$$\boldsymbol{f}_{\text{new}} = \boldsymbol{f} + \lambda \boldsymbol{r}_n$$

$$\boldsymbol{f}_{\text{new}} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{r}_n\big(p_n - \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f}\big)$$

- Repeat until some convergence criterion is reached

$$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{r}_n\big(p_n - \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f}_\nu\big)$$

Kaczmarz‘s Method (3)



$$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{r}_n \left(p_n - \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f}_\nu\right)$$

Kaczmarz in Image Reconstruction: Algebraic Reconstruction Technique (ART)

$$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{r}_n\left(p_n - \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{f}_\nu\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{f}_\nu}{\boldsymbol{R}^2 \cdot \boldsymbol{1}}}$$

Cost Functions (and Likelihoods)

- **General expression:** $\boldsymbol{f} = \arg\min_{\boldsymbol{f}} C(\boldsymbol{f})$
- **Examples:** $C(\boldsymbol{f}) = \left(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p}\right)^2$
  $$C(\boldsymbol{f}) = \left|\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}\, e^{-\boldsymbol{p}} + e^{-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}}\right|_1$$
- **Incorporate penalties:** $\hat{C}(\boldsymbol{f}) = C(\boldsymbol{f}) + P(\boldsymbol{f})$
- **Minimize**
  - Conjugate gradients
  - Coordinate descent
  - Ordered subsets (speedup)
  - Precondition $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{k}*\boldsymbol{p})$

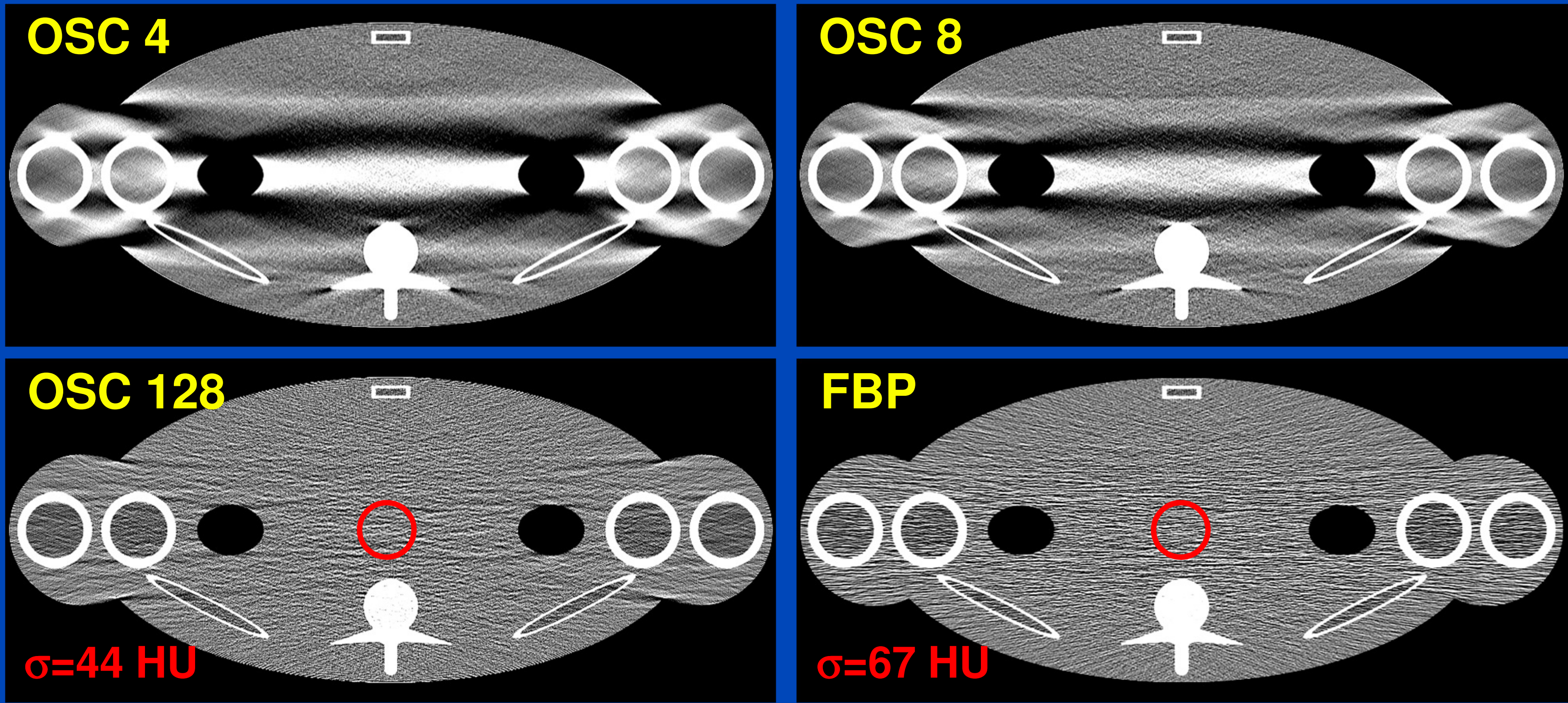
Flavours of Iterative Reconstruction

- **ART** $$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}_\nu}{\boldsymbol{R}^2 \cdot \boldsymbol{1}}$$

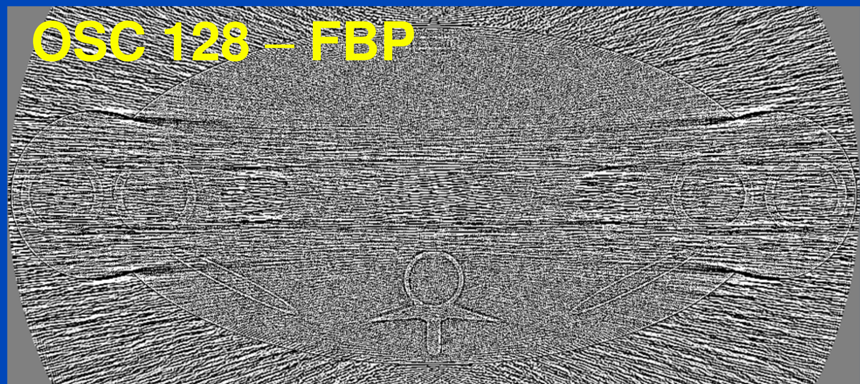
- **SART** $$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \frac{1}{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{1}} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}_\nu}{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{1}}$$

- **MLEM** $$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu \frac{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \left(e^{-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}_\nu}\right)}{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \left(e^{-\boldsymbol{p}}\right)}$$

- **OSC** $$\boldsymbol{f}_{\nu+1} = \boldsymbol{f}_\nu + \boldsymbol{f}_\nu \frac{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \left(e^{-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}_\nu} - e^{-\boldsymbol{p}}\right)}{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \left(e^{-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}_\nu} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}_\nu\right)}$$



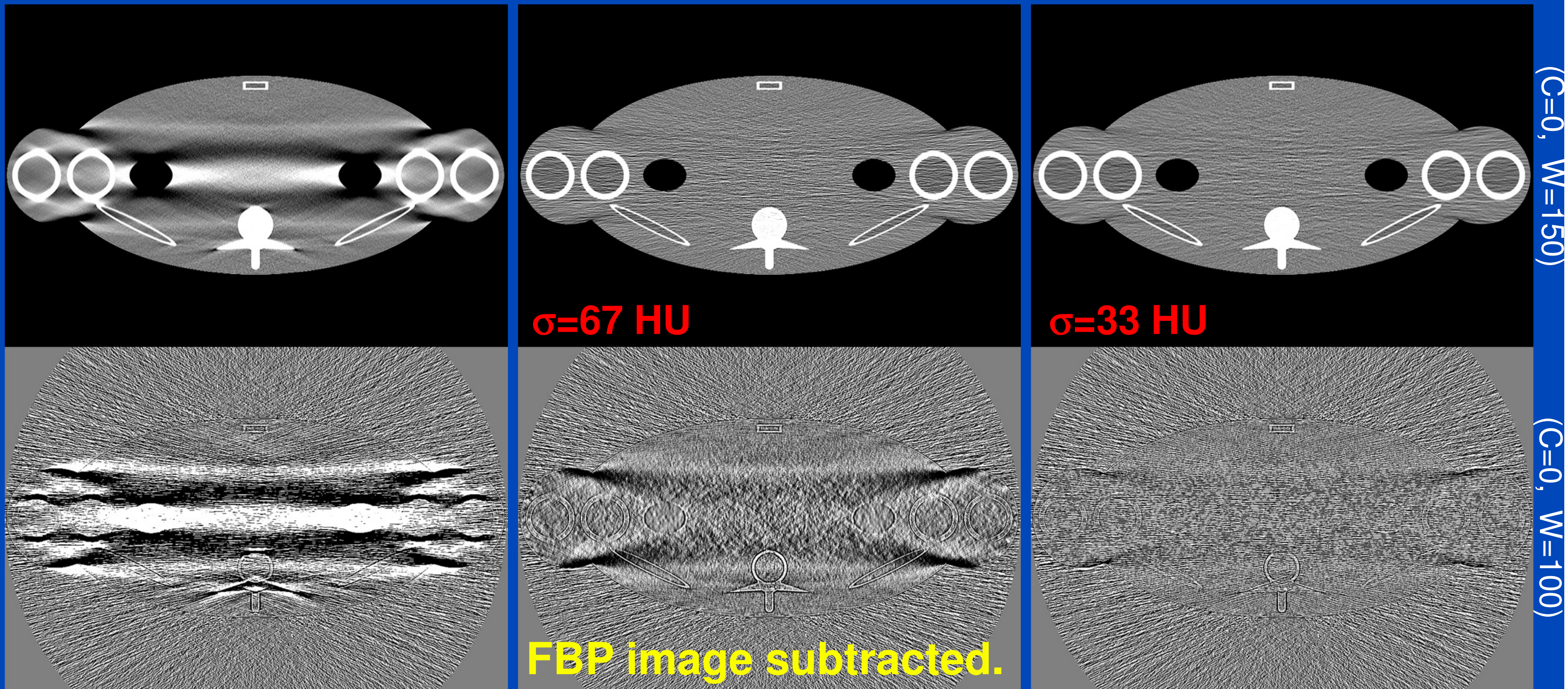
(C=0, W=150)



(C=0, W=100)

How to Improve OSC

OSC 4, initialized with constant value	OSC 4, initialized with matched FBP	OSC 4, initialized with smooth FBP



Insufficient image quality	Same noise as FBP	50% less noise than FBP

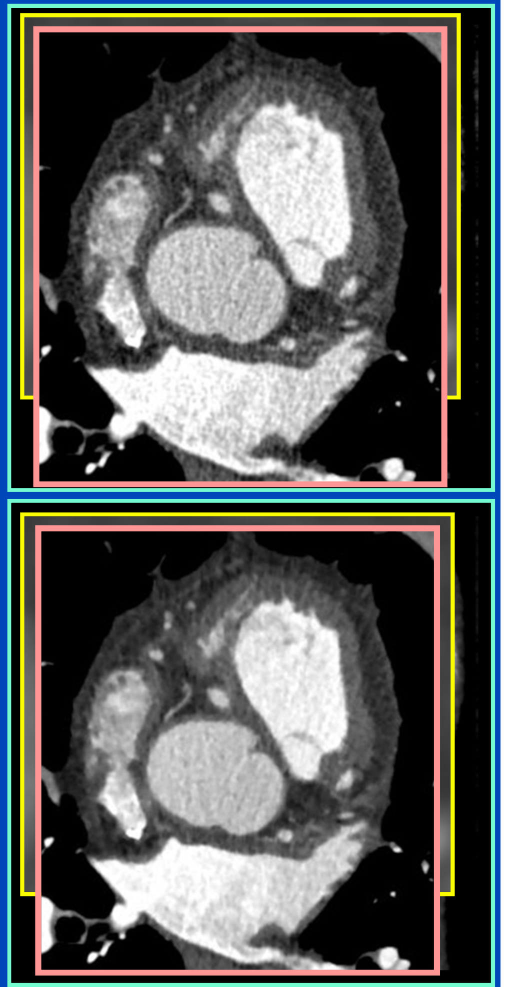
dkfz.

Zwischenfazit

- Klassische iterative Methoden
  - zeigen Dosisvorteile vorrangig bei extrem verrauschten Daten (insbesondere in der Nuklearmedizin)
  - sind extrem langsam
  - weisen teils ungewohnte Rauschtextur auf
  - lassen kaum Kontrolle über die Ortsauflösung zu (es gibt keine Faltungskerne)
- Klinisch relevante Lösungen
  - erfordern empirische Ansätze (z.B. kantenerhaltente Glättung im Bildraum, Einbau von Vorwissen, …)
  - müssen die Physik geeignet modellieren (z.B. Strahlweite, Winkelverschmierung, Strahlaufhärtung, …)
  - sind mittels FBP-Updates zu beschleunigen

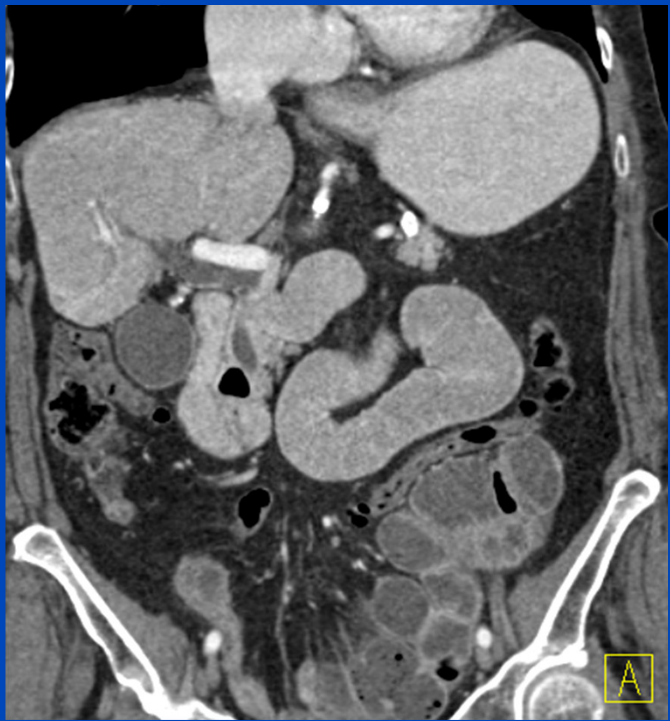
Iterative Bildrekonstruktion

- Ziel: weniger Artefakte, weniger Rauschen, weniger Dosis
- Ablauf einer iterativen Rekonstruktion
  - Rekonstruiere ein erstes Bild.
  - Ggf. regularisiere das Bild.
  - Passt das Bild zu den gemessenen Rohdaten?
  - Solange nein, berechne ein Korrekturbild.
- Iterative Rekonstruktion wird in SPECT und PET seit vielen Jahren eingesetzt.
- In der CT verhinderte der Rechenaufwand den routinemäßigen Einsatz bisher.
- Erste CT Produktimplementierungen
  - ASIR (adaptive statistical iterative reconstruction, GE)
  - VEO, MBIR (model-based iterative reconstruction, GE)
  - AIDR (adaptive iterative dose recuction, Toshiba)
  - IRIS (image reconstruction in image space, Siemens)
  - SAFIRE (sinogram-affirmed iterative reconstruction, Siemens)



Conventional reconstruction

at 100% dose



Iterative reconstruction and restoration

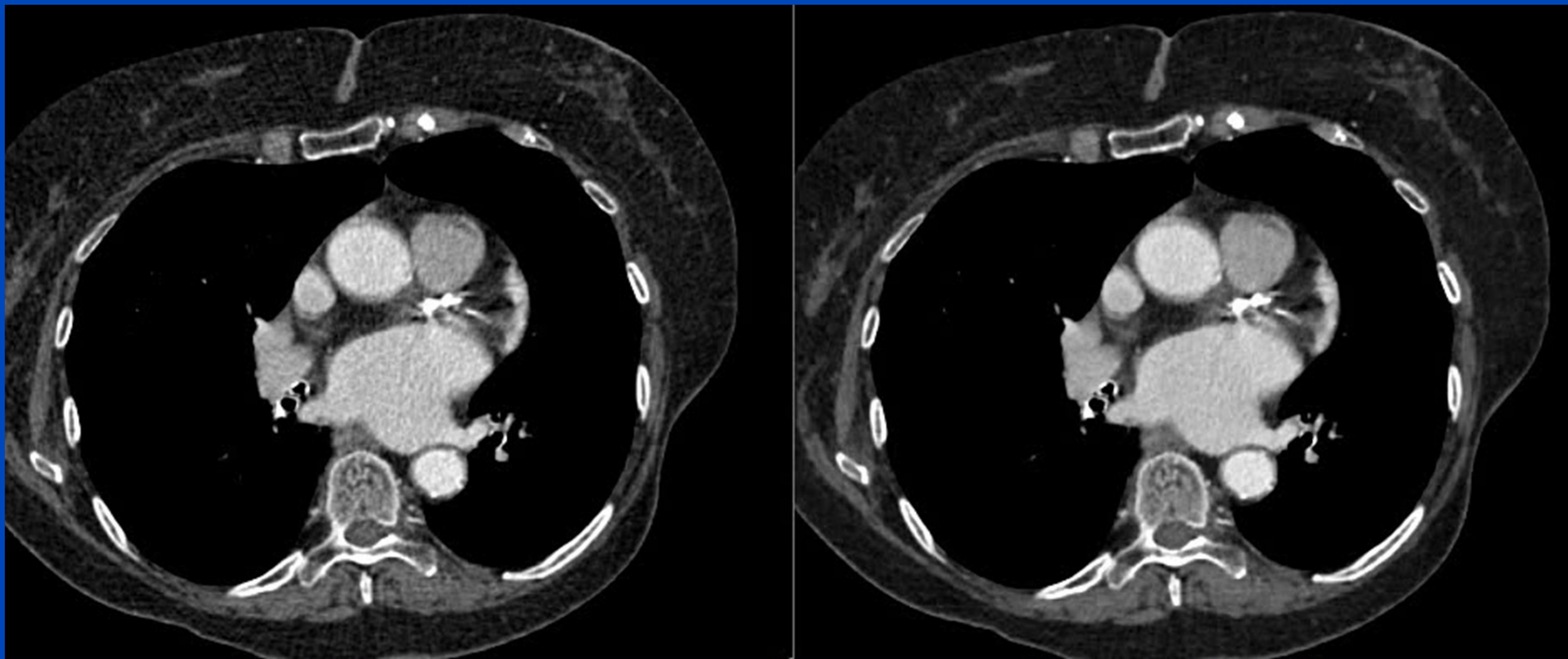
at 40% dose

Conventional reconstruction

at 100% dose

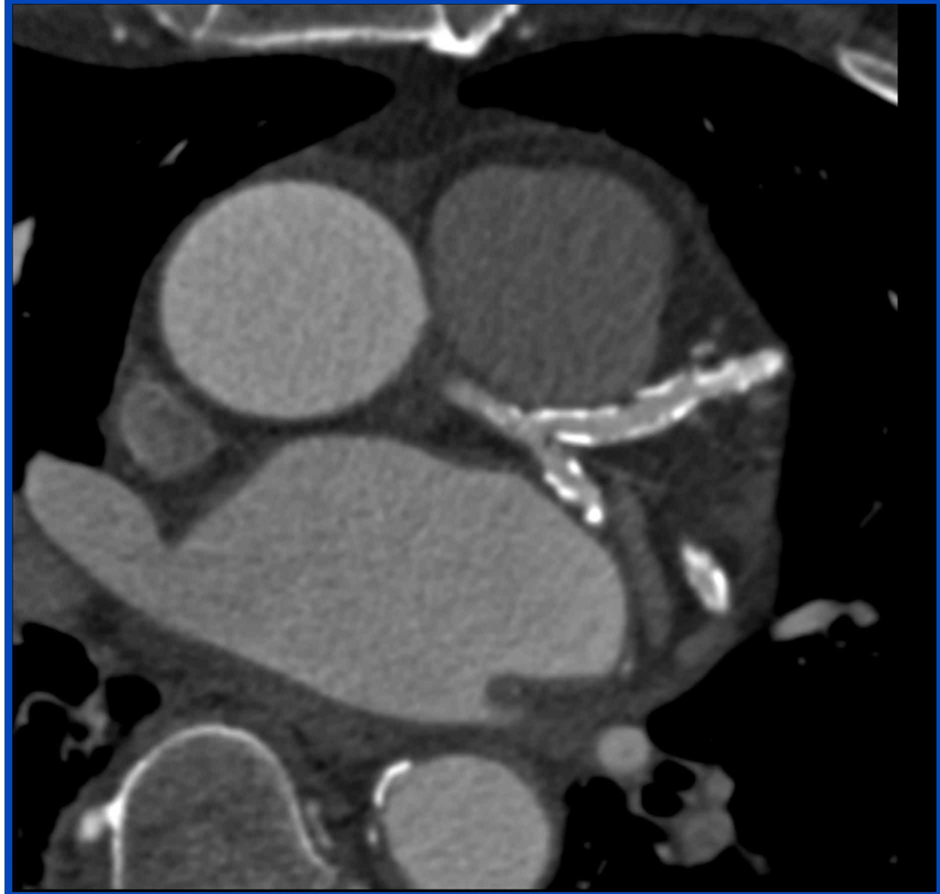
Iterative reconstruction and restoration

at 40% dose

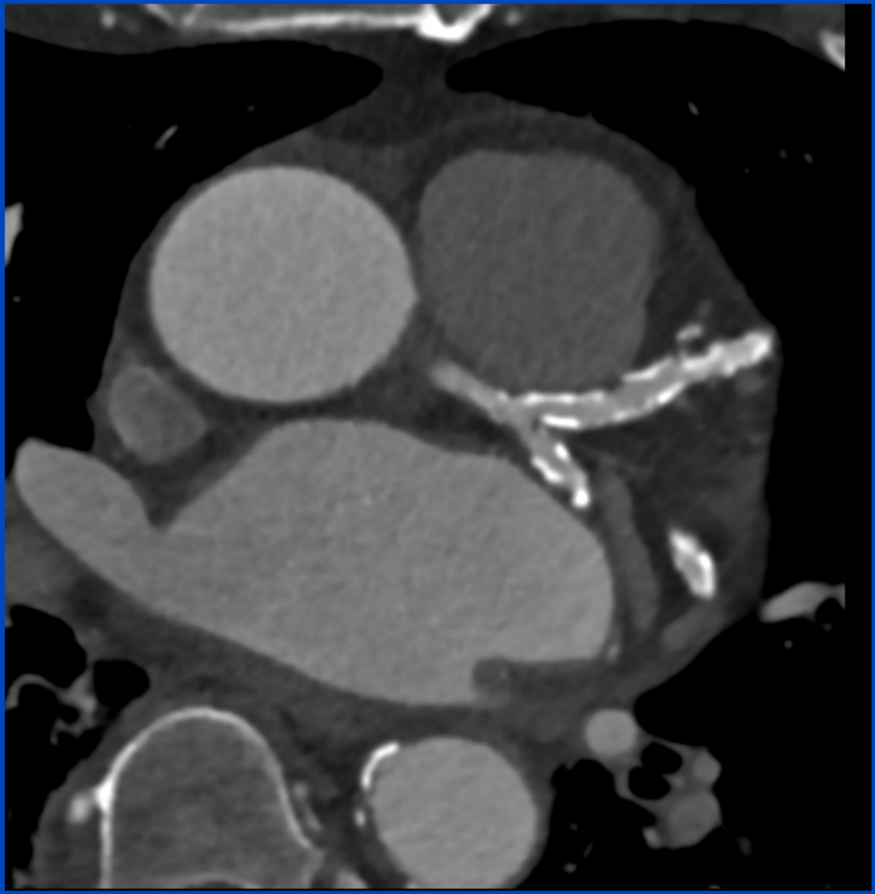


Images provided by Siemens Healthcare, Forchheim, Germany

Conventional reconstruction
at 100% dose



Iterative reconstruction and restoration
at 40% dose



Images provided by Siemens Healthcare, Forchheim, Germany

Zusammenfassung

- Klassische iterative Verfahren sind für die klinische CT kaum geeignet.
- Moderne iterative Verfahren basieren auf der Nutzung von Vorwissen, das sowohl im Bild- als auch im Rohdatenraum eingebracht werden kann.
- Alle Hersteller bieten iterative Rekonstruktion an.
- Dosisreduktionen um mehr als 50% werden angegeben, teils mit gleichzeitig verbesserter Ortsauflösung.
- Letztendlich sind die Verfahren in zahlreichen klinischen Studien zu bewerten.
- Bemerkungen:
  - Dass das Rauschen in näherungsweise homogenen Bereichen sinken und die Ortsauflösung an Kanten ansteigen kann ist offensichtlich: die iterative Rekonstruktion enthält explizit oder implizit eine kantenerhaltende Glättung.
  - Ob das steigende Rauschen an den Kanten und die schlechtere Ortsauflösung in näherungsweise homogenen Bereichen nachteilig für die Diagnose ist, wird sich in klinischen Studien zeigen.
  - Durch die iterative Rekonstruktion steigt der Informationsgehalt der Bilder nicht an; der menschliche Betrachter hingegen profitiert möglicherweise sehr wohl von der verbesserten Bildqualität.


Vielen Dank
marc.kachelriess@dkfz.de
Diese Präsentation ist in Kürze unter www.dkfz.de/ct abrufbar.